

2016 年度入学試験問題(後期)

数 学 (問 題)

注 意

- 1) 数学の問題冊子は4ページあり, 問題はI, II, III, IVの4題である。
- 2) 別に解答用紙1枚があり, 解答はすべてこの解答用紙の指定欄に記入すること。
指定欄以外への記入はすべて無効である。
計算や下書きは問題用紙の白紙・空白部分を利用して行うこと。
- 3) 解答用紙の所定欄に受験番号を記入せよ。氏名を記入してはならない。
解答用紙の※印の欄には何も記入してはならない。
- 4) 問題冊子, 解答用紙はともに持ち出してはならない。
- 5) 途中退場または試験終了時には, 解答が他の受験生の目に触れないよう, 解答用紙の上に問題冊子を重ねて, 監督者の許可を得た後に退出すること。

2016 年度後期入学試験問題 数学（問題） 訂正

数学

4 ページ 大問：IV

「垂線の足」に関する補足説明

「点Aから l におろした垂線の足」とは、点Aを通る l の垂線と l との交点のことである。

I (1)~(6)の の中に、あてはまる数、角度、整式、不等式、記号、語句などを記入せよ。

(1) 次の式を因数分解せよ。

$$4x^4 - 5x^2 + 1 = \text{ア}, \quad (x+2)(xy+2)(y+1) + 2xy = \text{イ}$$

(2) $\cos \theta = \frac{-3}{2(\sqrt{7}+1)}$ のとき、以下の値を求めよ。ただし、 $0 \leq \theta \leq \pi$ とする。

$$\sin \theta - \cos \theta = \text{ウ}, \quad \sin^3 \theta - \cos^3 \theta = \text{エ},$$

$$\sin 3\theta + \cos 3\theta = \text{オ}$$

(3) 下の7個のデータにおいて、平均値は157、中央値は163である。

187, 135, 146, 185, a , 172, b

$a < b$ とするとき、 $a = \text{カ}$, $b = \text{キ}$ である。

またこのデータの四分位範囲は ク である。

(4) 2016の正の約数は ケ 個あり、その総和を8進数で表すと コ である。また $\sqrt{2016n}$ が整数となるような最小の自然数 n を、2進数で表すと サ である。

(5) $ae^x - (x^2 + 2x) = 0$ が異なる3個の実数解を持つとき、 a の範囲は シ である。また異なる2個の実数解を持つとき、 a の範囲は ス である。

(6) 不等式 $8^{-x} - 4^{1-x} - 2^{2-x} + 16 \geq 0$ を満たす範囲は セ である。

II $0 \leq x \leq 1$ の範囲で関数 $f_n(x)$ が、次の式で定義されている。

$$f_0(x) = x, \quad f_{n+1}(x) = |2f_n(x) - 1|$$

(1) $y = f_3(x)$ の概形を に図示せよ。

(2) xy 平面上の $y = f_n(x)$ と直線 $y = k$ ($0 \leq k \leq 1$) とで囲まれた部分の面積の総和 $S_n(k)$ を n と k とを用いて表すと となる。ただし、 n は 1 以上とする。

(3) $S_n(k)$ は k が $k_n =$ のときに、最小値 $S_n =$ をとる。ただし、 n は 1 以上とする。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n =$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ が成り立つ。

Ⅲ 1から6までの番号が1つずつ書かれた6枚のカードがある。2人のプレイヤーに、それぞれ3枚ずつ無作為にカードを渡す。以降、プレイヤーが持っているカードを手札という。2人のプレイヤーは、それぞれ手札から1枚ずつカードを場に出して対戦し、大きい数字の書かれたカードを出した方が、その対戦の勝者となる。一度場に出したカードは、手札に戻さないとする。3枚の手札を用いた3回の対戦のうち、2回以上勝った者を、このゲームの勝者とする。

ゲーム開始時に1の番号が書かれたカードを手札に持つプレイヤーをプレイヤーA、もう一人をプレイヤーBとすると、以下の間に答えよ。

- (1) 2人のプレイヤーへのカードの渡し方は 通りある。そのうち、プレイヤーAが必ずゲームの敗者となる渡し方は 通りである。
- (2) 2人のプレイヤーが、どちらも手札から無作為に場に出して対戦するとき、プレイヤーAがゲームの勝者となる確率は である。
- (3) 2人のプレイヤーが、どちらも数字の小さい手札から順に場に出して対戦するとき、プレイヤーAがゲームの勝者となる確率は である。
- (4) プレイヤーAは数字の小さい手札から、プレイヤーBは数字の大きい手札から順に場に出して対戦するとき、プレイヤーAがゲームの勝者となる確率は である。

IV 空間内に、点 $L(-2, -1, 0)$ を通って $\vec{a} = (1, 0, 0)$ に平行な直線 l と、点 $M(1, 1, 2)$ を通って $\vec{b} = (0, 0, 1)$ に平行な直線 m を定める。空間内の点 $A(x, y, z)$ から直線 l におろした垂線の足を点 P 、直線 m におろした垂線の足を Q としたとき、 $AP = AQ$ が成立している。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) \vec{AP} と \vec{AQ} を x, y, z を用いて表すと $\vec{AP} = \boxed{\text{ハ}}$ 、 $\vec{AQ} = \boxed{\text{ヒ}}$ である。また、 $AP = AQ$ が成立していることから、 x, y, z の間には、
 $\boxed{\text{フ}}$ の関係が成り立つ。

(2) $AP = AQ$ が最小値をとるとき $AP = AQ = \boxed{\text{ヘ}}$ となる。このとき A の座標は $\boxed{\text{ホ}}$ となる。

(3) 点 A が xy 平面上を動くとき、その軌跡を表す式は $\boxed{\text{マ}}$ である。また、点 A が $y = 1$ 平面上を動くとき、その軌跡を表す式は $\boxed{\text{ミ}}$ である。